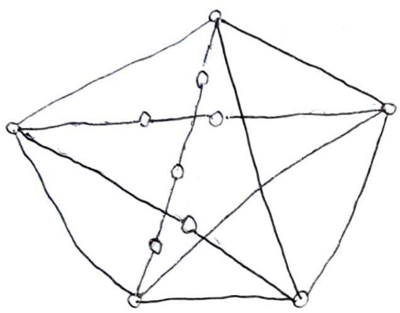
Graf planarny to graf, który można narysować na płaszczyźnie bez przecięcia się krawędzi. Graf płaski to rysunek grafu planarnego bez przecięć.

Twierdzenie: K_5 nie jest planarny.

Twierdzenie: $K_{3,3}$ nie jest planarny.

Graf homomorficzny z K_5 ($K_{3,3}$)



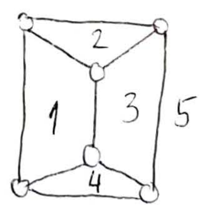
FAKT: Jeśli G zawiera podgraf homomorficzny z $K_{3,3}$ lub K_5, to nie jest planarny.

Twierdzenie Kuratowskiego: G planarny $\iff$ nie zawiera podgrafu homomorficznego z $K_{3,3}$ lub K_5

Wzór Eulera (graf płaski spójny)

n - wierzchołków,
m - krawędzi
f - ścian

$$\underline{n - m + f = 2}$$



Dowód: indukcja po m

1° Drzewo: n, $m = n-1$, $f = 1$: $n - m + f = n - n + 1 + 1 = 2$

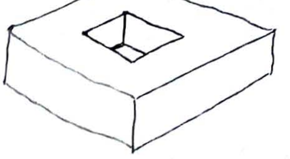
2° Niech G zawiera ścianę ograniczoną krawędziami. Niech e będzie krawędzią tej ściany. G\e spełnia wzór Eulera (z założenia).

$$n(G\setminus e) = n, \quad m(G\setminus e) = m-1, \quad f(G\setminus e) = f-1$$

$$2 = n(G\setminus e) - m(G\setminus e) + f(G\setminus e) = n - (m-1) + (f-1) = n - m + f \quad \blacksquare$$

Wniosek: Dla dowolnego wielościanu bez dziur, $n - m + f = 2$.

Wniosek: G − prosty, spójny, planarny, $n > 2$ $\Rightarrow$ $m \leq 3n - 6$.



WIELOŚCIAN Z DZIURĄ

Każda ściana jest ograniczona przez co najmniej 3 krawędzie i każda krawędź jest użyta dokładnie 2 razy do ograniczenia ścian. Niech m_i będzie liczbą krawędzi ograniczających i-tej ściany. Wtedy

$$2m = m_1 + m_2 + \ldots + m_f \geq 3f$$

$$n - m + f = 2 \quad / \cdot 3$$

$$6 = 3n - 3m + 3f \leq 3n - 3m + 2m = 3n - m$$

$$6 \leq 3n - m \iff m \leq 3n - 6$$

Wniosek: G − spójny, prosty, planarny, $n > 2$, G bez trójkątów $\Rightarrow$ $m \leq 2n - 4$

Lemat: Graf planarny, prosty zawiera wierzchołek stopnia ≤ 5.

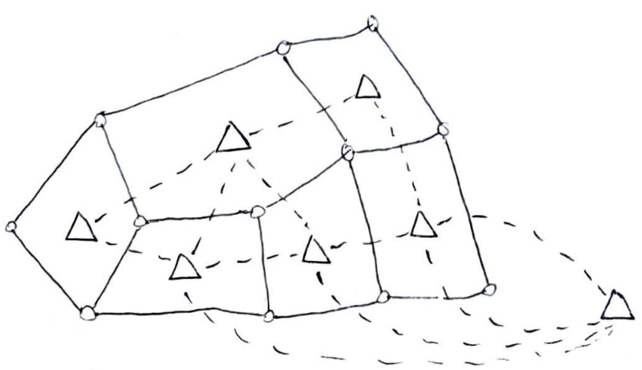
Dowód: Załóżmy nie wprost, że wszystkie wierzchołki mają stopień ≥ 6. Wtedy
$2m = \deg(v_1) + \ldots + \deg(v_n) \geq 6n \Rightarrow m \geq 3n$, co przeczy $m \leq 3n - 6 \Rightarrow m < 3n$

∎

Kolorowanie grafów planarnych:

- kolorowanie wierzchołków − każde dwa sąsiednie wierzchołki mają różne kolory
- kolorowanie ścian / kolorowanie map − każde $\underbrace{\text{dwie sąsiednie ściany}}_{\text{wspólna krawędź}}$ mają różne kolory

Graf dualny



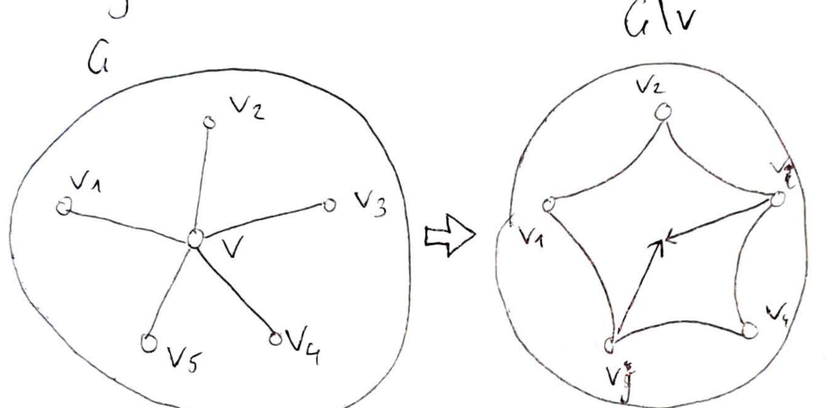
Twierdzenie: Wierzchołki każdego grafu planarnego można pokolorować pięcioma kolorami.

Dowód: indukcja po n

v - wierzchołek G stopnia ≤ 5

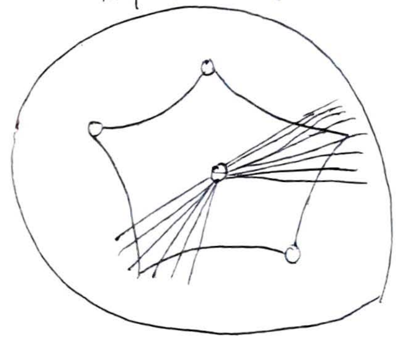
1° $\deg(v) = 2, 3, 4$ z zał. ind. $G \setminus v$ można pokolorować pięcioma kolorami, po dodaniu v istnieje wolny kolor, którego nie używa żaden sąsiad i można nim pokolorować v.

2° $\deg(v) = 5$



Istnieją v_i, v_j między którymi nie ma krawędzi (inaczej $K_5 \subseteq G$).

Graf ptaszki G'



można go pokolorować pięcioma kolorami

można $G \setminus v$ pokolorować pięcioma kolorami, że v_i, v_j mają ten sam kolor

mamy wolny kolor dla v, bo jego sąsiedzi używają co najwyżej czterech kolorów

Kolorowanie grafów:

Graf jest k-kolorowalny, gdy istnieje takie kolorowanie wierzchołków tego grafu k kolorami, że żadne 2 sąsiednie wierzchołki nie mają tego samego koloru.

Liczba chromatyczna grafu G to minimalne k takie, że G jest k-kolorowalne. Oznaczenie $\chi(G)$ - chi(G).

1° $\chi(G)=1 \Rightarrow$ graf pusty (bezkrawędziowy)

2° $\chi(G)=2 \Rightarrow$ graf dwudzielny

3° $\chi(G)>2 \Rightarrow$ problem NP-zupełny

4° $H \subseteq G \Rightarrow \chi(H) \leq \chi(G)$

5° $K_k \subseteq G \Rightarrow k \leq \chi(G)$

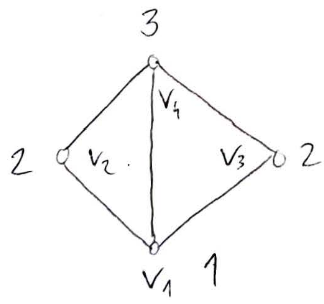
k - rozmiar największego zbioru niezależnego w G $\Rightarrow \chi(G) \geq \frac{n}{k}$

Algorytm sekwencyjny

1° ustaw wierzchołki zgodnie z pewną regułą w kolejności $v_0, v_1, \ldots, v_n$

2° dla $i = 1, 2, \ldots, n$

2.1° Pokoloruj v_i na kolor o najmniejszym numerze nieużywanym do kolorowania jego sąsiadów



Twierdzenie: $\chi(G) + \chi(G') \leq n+1$ ← był jakiś dowód do tego

Twierdzenie Brooksa: $\chi(G) = \deg(G)+1 \Leftrightarrow$ G jest kliką lub cyklem długości nieparzystej

Twierdzenie Brooksa: jeśli G nie jest kliką lub cyklem nieparzystym, to $\chi(G) \leq \deg(G)$