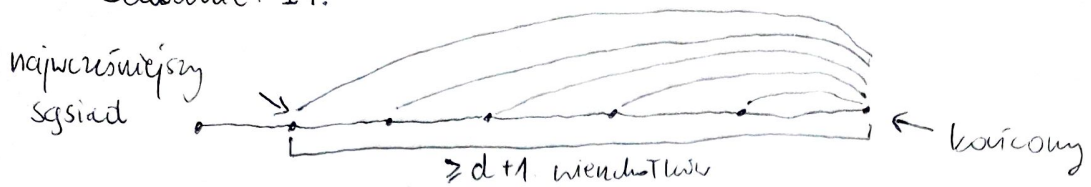
Zadanie 14.

{u,v} - graf nieskierowany
(u,v) - graf skierowany
(para uporządkowana)



Zaczynamy w dowolnym wierzchołku, zawsze idziemy do dotychczas nieodwiedzonego sąsiada (o ile to możliwe).

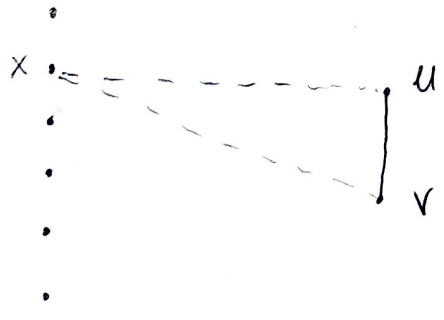
Zadanie 13. Pokaż że graf niezawierający trójkątów ma nie więcej niż $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ krawędzi.

Dowód indukcyjny względem $n = |V(G)|$:

- baza: $n = 0, 1, 2$
- krok: weźmy G bez trójkątów takiej, że $|V(G)| = n+2$ i wybierzmy dowolną krawędź $\{u,v\}$. Graf $G-u-v$ (tzn. bez wierzchołków u,v oraz krawędzi z nich wychodzących) również bez trójkątów nazwijmy H, wtedy $|E(H)| \leq \left\lfloor \frac{|V(H)|^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. Natomiast G ma $|E(G)| \leq |E(H)| + 1 + |V(H)| =$ ($\{u,v\}$, dowolna)

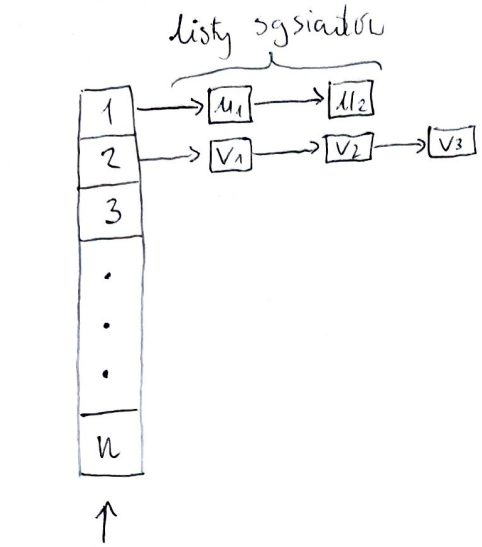
$$= \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1 + n = \left\lfloor \frac{n^2+4n+4}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n+2)^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|V(G)|^2}{4} \right\rfloor$$

Obserwacja:



$\forall x \notin \{u,v\}$ może istnieć tylko jedna krawędź z wierzchołka x idąca do jednego z wierzchołków u,v, aby nie było trójkątów w grafie

Zadanie 1. G_1, G_2 dwa grafy na $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.



ALGORYTM:

1 zainicjuj tablicę $N[1 \ldots n]$, wypełnij ją zerami

2 dla wierzchołka $i = 1, 2, \ldots, n$:

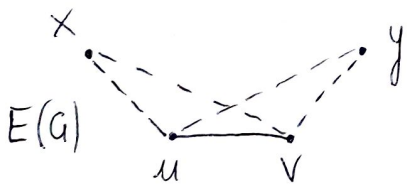
- count := 0
- dla każdego j, sąsiada i w G_1:
  - $N[j] := 1$,
  - count := count + 1
- dla każdego j, sąsiada i w G_2:
  - jeśli $N[j] \neq 1$:
    - zwróć „nie" i zakończ
  - wp.p.:
    - $N[j] = 0$
    - count := count − 1
  - jeśli count $\neq 0$
    - zwróć „nie" i zakończ

czas proporcjonalny do stopnia wierzchołka

Zadanie 3.

Załóżmy, że $d(G) > 3$. Wtedy istnieją wierzchołki x, y w odległości > 3.
W szczególności dla dowolnej krawędzi $\{u, v\}$ z G:

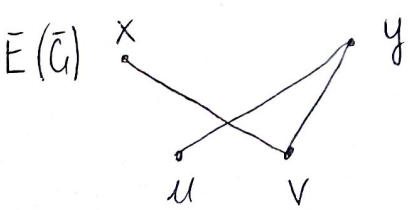
$$|\{a, b\} \in E(G) : a \in \{x, y\},\ b \in \{u, v\}\}| \leq 1.$$



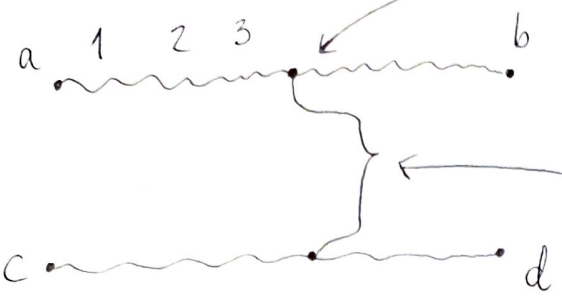
Rozważmy dowolną parę $\{u, v\}$ w $\bar{G}$:

1° $\{u, v\} \notin E(G) \Rightarrow \{u, v\} \in E(\bar{G})$

2° $\{u, v\} \in E(G) \Rightarrow$ jeden z wierzchołków x, y nie jest połączony krawędzią ani z u, ani z v. Niech to będzie y. Wtedy w $\bar{G}$ mamy ścieżkę uyv



Zadanie 6.



ostatni i pierwszy wierzchołek z odpowiednich ścieżek $a \sim b$ i $c \sim d$ odwiedzone przez ścieżkę $a \sim c$

nie ma wierzchołków wspólnych z $a \sim b$, $c \sim d$