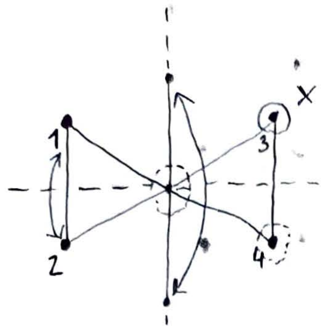
Matematyka dyskretna, Repetytorium 9, 09/12/2012

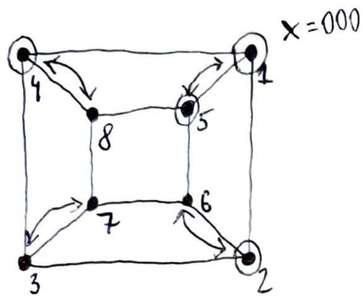
Zadanie 2. Rzędy grup automorfizmów, $|G| = |G_x||O_x|$



(1,2,3,4 - orbity)

$|O_x| = 4$ (wierzchołki mogące przejść na siebie)

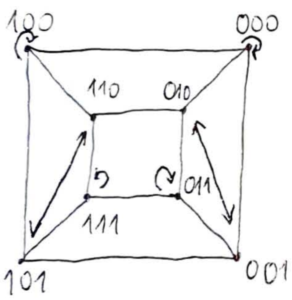
$|G_x| = 4$ (dwie niezależne zamiany wierzchołków oznaczone strzałkami).



Zamiany między wierzchołkami wewnętrznymi a zewnętrznymi muszą się dziać równocześnie.

$|O_x| = 8$

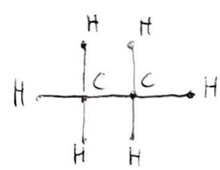
$|G_x| = 3!$



Sąsiedzi $x = 000$ to $001, 010, 100$ (w kostkach), jednak kolejność ich numeracji nie ma znaczenia.

$$\forall \pi \in S_3: \varphi_\pi(x_1,x_2,x_3) = x_{\pi(1)} \cdot x_{\pi(2)} \cdot x_{\pi(3)}$$

Zadanie 13. Graf C_kH_{2k+2} jest drzewem, np.



$$2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v) = \underbrace{4k}_{\text{sąsiedzi } C} + \underbrace{2k+2}_{\text{sąsiedzi } H} = 6k+2 = 2(3k+1) = 2((3k+2)-1) = 2(|V|-1)$$

$k=5$

deg max ≤ 2

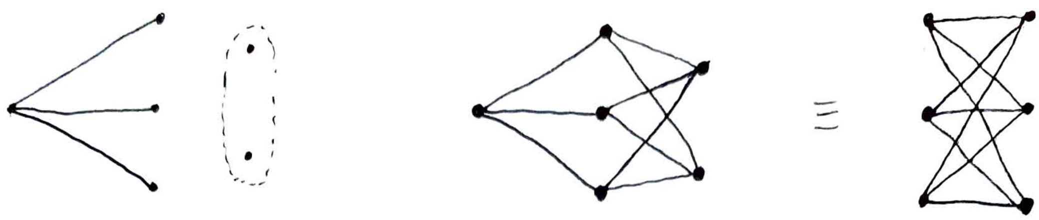
deg max $= 3$

deg max $= 4$

Zadanie 5. Narysuj wszystkie nieizomorficzne sześciowierzchołkowe grafy 3-regularne.

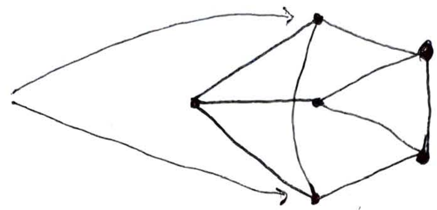
połączone krawędzią albo nie

$K_{3,3}$



niepołączone

te wierzchołki muszą połączyć, aby graf był 3-regularny

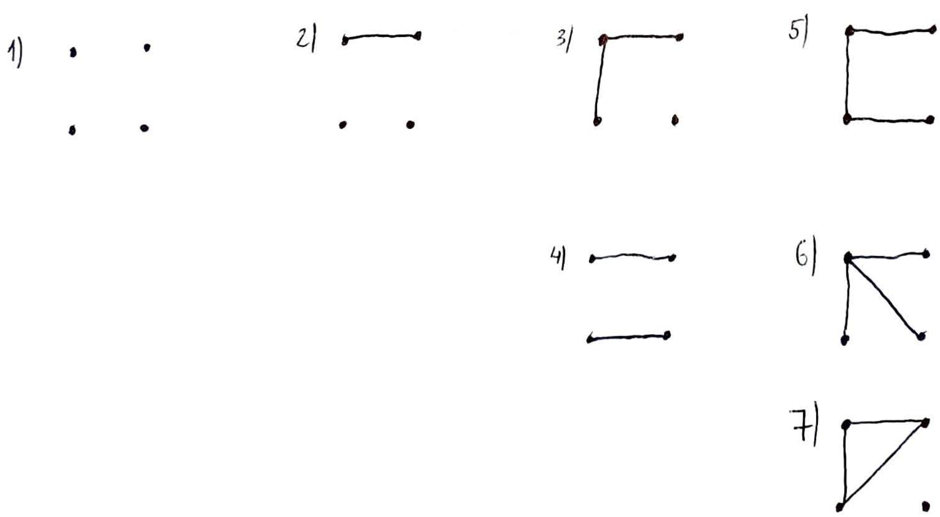


połączone

Zadanie 4. Wykaż, że z dokładnością do izomorfizmu...

$$|V| = 4, \quad \max |E| = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$|E| = 0$ $\quad$ $|E| = 1$ $\quad$ $|E| = 2$ $\quad$ $|E| = 3$



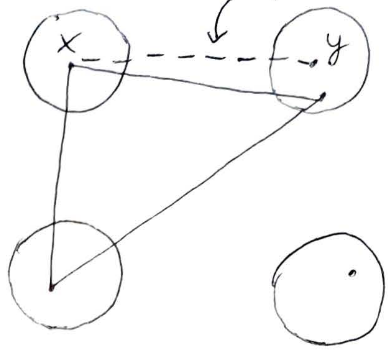
Dla $|E|=4$ jest tyle samo co dla $|E|=2$, dla $|E|=5$ tyle co dla $|E|=1$ oraz dla $|E|=6$ tyle co dla $|E|=0$, czyli jest ich 11.

Zadanie 9. Udowodnij, że przynajmniej jeden z grafów $G, \bar{G}$ jest spójny.

Niech G będzie niespójny, tj. $\exists x,y \in V(G)$ takie, że nie ma ścieżki z x do y (czyli x i y są w dwóch różnych składowych spójności).

W $\bar{G}$ mamy: krawędź $\{x,y\}$ oraz $\forall z \in V$ przynajmniej jedną z krawędzi $\{x,z\}, \{y,z\}$

dopełnienie sprawi, że ścieżka $\{x,y\}$ powstanie



Zadanie 12. Udowodnij, że graf prosty...

1° Przy maksymalnej liczbie krawędzi, każda składowa jest kliką.

2° Jeśli mamy składową A o a wierzchołkach i składową B o b wierzchołkach takich, że $a \geq b > 1$, to przełożenie 1 wierzchołka z B do A zwiększa liczbę krawędzi o $a-(b-1) = (a-b)+1 \geq 1$.

3° Zatem maksymalna liczba krawędzi dla $p-1$ składowych rozmiaru 1 i 1 składowej rozmiaru $n-p+1$: $\frac{(n-p+1)(n-p)}{2}$.

Dla minimalnej liczby krawędzi:

1° Każda składowa jest drzewem, więc $|E| = \sum_{i=1}^{p} (|V_i|-1) = \sum_{i=1}^{p} |V_i| - p = n-p$