Matematyka dyskretna, Repetytorium 6, 18/11/2019

Zadanie 1. Interpretacja $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

P: na n sposobów wybieramy przewodniczącego, następnie dowolny podzbiór z pozostałych n-1 osób.

L: dla każdego k (liczności delegacji) wybieramy k osób do delegacji ($\binom{n}{k}$), następnie spośród nich przewodniczącego.

Zadanie 9. Na ile sposobów można usadzić przy okrągłym stole n par włochów tak, by żadna z tych par nie siedziała obok siebie.

Korzystamy ze wzoru włączeń-wyłączeń:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot d_k \cdot k! \cdot 2^k \cdot (2n-2k)!$$

pary włochów

kolejność par

liczba możliwych ułożeń nierozróżnialnych kostek domina na okręgu z wyróżnionymi n punktami

Zadanie 10. Na ile sposobów można usadzić przy okrągłym stole n par małżeńskich tak, by mężczyźni i kobiety siedzieli naprzemian i żadna para nie siedziała obok siebie. (2 metody).

(1) $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \overbrace{d_k \cdot 2 \cdot k! \cdot ((n-k)!)^2}^{|A_X| \text{ dla } |X|=k} \quad (?)$$

$$d_k = \frac{2 \cdot n \cdot \binom{2n-k-1}{k-1}}{k}$$

2n - wybór lewego końca pierwszej kostki

(2) $$2 \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot d_k \cdot (n-k)!$$

$\binom{2n-k-1}{k-1}$ - na $2n-2$ pozycjach (na odcinku) układziemy $k-1$ kostek -
- kodujemy to jako dowolny ciąg $k-1$ jedynek oraz
$(2n-2) - 2(k-1) = 2n-2k$ zer

k - dzielimy przez k, bo dowolna z k kostek może być pierwsza

W 9. i 10. działamy na zbiorach:

A_X - zbiór takich osadzeń, że pary o numerach z X siedzą obok siebie (pozostałe osoby dowolnie), $X \subseteq \{1,2,3,\dots,n\}$

$$|A^c_{\{1\}} \cap A^c_{\{2\}} \cap \dots \cap A^c_{\{n\}}| = \sum_{X \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|X|} \cdot |A_X|,$$

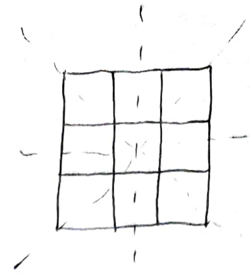
$|A_X|$ zależy wyłącznie od $|X|$, a nie samego X.

Zadanie 13. Niech grupa G działa na zbiorze X i $|G| = 2^k$, a $|X|$ - nieparzyste. Pokaż, że w X istnieje taki element, który jest punktem stałym wszystkich przekształceń z G.

$$|G| = |\underbrace{G_x}_{\text{stabilizator}}| \cdot |O_x| \qquad |G| = 2^k,\ 2 \nmid |X|$$

Załóżmy nie wprost, że $\forall x \in X\ |G_x| < |G|$. Wtedy $\forall x \in X\ |O_x| = \frac{|G|}{|G_x|} = 2^{a_x}$ dla pewnego $a_x \in \mathbb{N}$, $a_x \geq 1$, czyli każda orbita ma parzystą moc.
Sprzeczność, bo $|X|$ jest sumą mocy wszystkich orbit, a $2 \nmid |X|$.

Zadanie 16. Dane są karty 3×3, ...



G – 4 obroty (0°, 90°, 180°, 270°) oraz 4 symetrie, $|G| = 8$

$$\#\text{orbit (różnych sposobów)} = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

(1) · 0° (id) : $\binom{9}{2}$

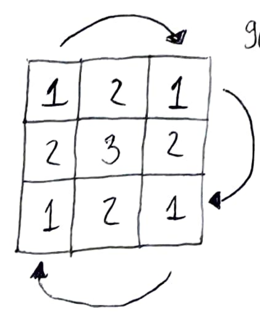
(2) · 90°, 270° : 0

(3) · 180° : $\binom{4}{1} = 4$ ułożenia będące punktem stałym

(4) · symetria OX/OY: $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 6$

(5) · symetria (przekątne) : $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 6$

(2) 90°/270°



(3) 180°

2	3	4
5	1	5
4	3	2

(4) OX/OY

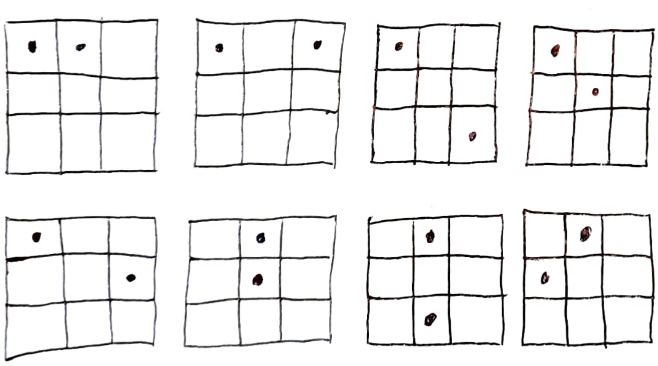
1	4	1
2	5	2
3	6	3

wybór z (1,1), (2,2), (3,3) lub pary ze zbioru {4,5,6}

(5) przekątne

5	4	3
6	2	4
1	6	5

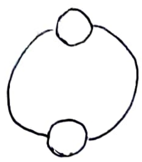
$$\#\text{orbit} = \frac{1}{8}(36 + 4 + 4 \cdot 6) = 8$$



Zadanie 17. Naszyjniki z p kamieni

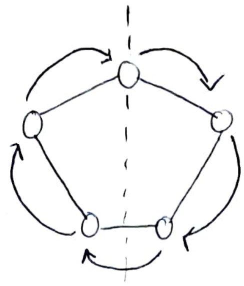
G – p obrotów (być może) p symetrii względem osi

$p=2$



↖ 3 możliwości: BB, BW, WW

$p=5$



$$\frac{1}{|G|}\cdot\sum_{g\in G}|Fix(g)|$$

- obrót o 0° (id): 2^p — 1
- symetrie: $2^{\frac{p-1}{2}+1}$ — p
- nietrywialne obroty: 2 — $p-1$

↑ liczba przedstawicieli

$\forall i\in\{1,2,\dots,p-1\}\ i\perp p$, tj. $\exists j\in\{1,2,\dots,p-1\}\ i\cdot j\equiv_p 1$