Matematyka dyskretna, Repetytorium 5, 4/11/2019

Zadanie 3.

$$\mathbb{Z} \ni \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

INNE ROZWIĄZANIE: (później dokończone)

Niech $m_p^i(n)$ oznacza ile spośród liczb od 1 do n jest podzielnych przez p^i. Wystarczy, że wykażemy

$$m_p^i(k!) \leq m_p^i\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)$$

Zadanie 4.a Zasada szufladkowa

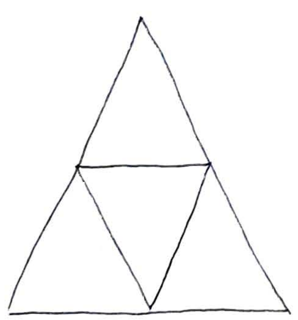
Szufladki - liczby wygranych meczy $(0, 1, \ldots, n-1)$

jeżeli istnieje drużyna, która nie wygrała żadnego meczu, to nie istnieje drużyna, która wygrała $n-1$ meczów

Szufladki 0 i $n-1$ nie mogą być jednocześnie niepuste $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ efektywnie $n-1$ szufladek i n drużyn.

Zadanie 4.b.



szufladkami są 4 małe trójkąty długości dwóch

Zadanie 4.c

Niech n będzie liczbą ścian. Szufladki odpowiadają możliwym liczbom krawędzi na ścianach, tj. $3, \ldots, n-1$. Jest ich $< n$, więc pewne dwie ściany mają tyle samo krawędzi.

podział n elementów na $n-1$ grup

Zadanie 5. Dane są $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokaż, że istnieją i, j takie, że $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ jest podzielne przez n.

Rozważmy wszystkie $n+1$ sum prefiksowych:

$$A_i = \sum_{j=1}^{i} a_j \quad (0 \le i \le n)$$

Tych sum jest $n+1$, a różnych reszt $(\mathrm{mod}\ n)$ tylko n, więc

$$\exists_{k,m,n}\ (0 \le k < m \le n) \wedge A_k \equiv A_m \pmod{n}.$$

To oznacza, że $A_m - A_k = \sum_{j=k+1}^{m} a_j$ jest podzielne przez n.

Zadanie 13.6

$$\sum_{0 \le k \le n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}, \quad m, n \ge 0$$

liczba podzbiorów $(m+1)$-elementowych zbioru $\{1, \ldots, n+1\}$

liczba podzbiorów m-elementowych zbioru $\{1, \ldots, k\}$, czyli
liczba podzbiorów $(m+1)$-elementowych zbioru $\{1, \ldots, k+1\}$ takich, że
zawierają $\{k+1\}$

Zadanie 14. a

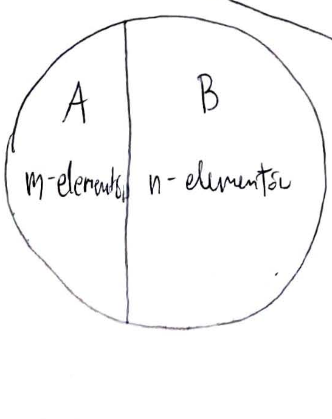
$$\binom{m+n}{r} = \sum_{s=0}^{r} \binom{m}{s} \binom{n}{r-s}$$

wybór r z $A \cup B$, gdzie $|A \cup B| = m+n$

wybór s z A, gdzie $|A| = m$

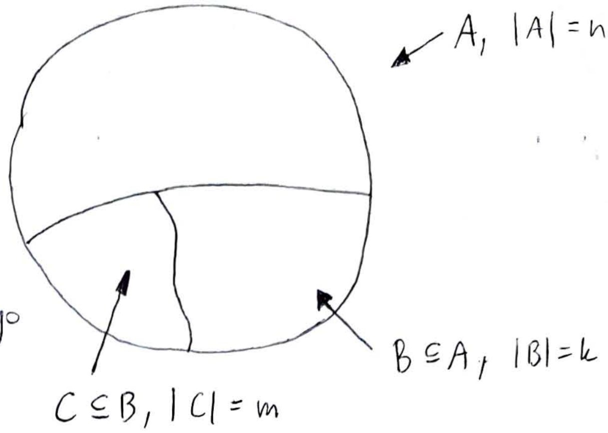
wybór $r-s$ z B, gdzie $|B| = n$

sumujemy po możliwych s



Zadanie 14. b

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}$$



Po obu stronach mamy liczbę podzbiorów zbioru n-elementowego na 3 rozłączne zbiory o liczbie elementów m, $k-m$, $n-k$, przy czym te podzbiory wybieramy w różnych kolejnościach.

Zadanie 3. (inne rozwiązanie, dokończenie)

Dla dowolnego p pierwszego, max $\alpha \in \mathbb{N}$ takiego, że $p^{\alpha} | n!$, to

$$f_p(n) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor.$$

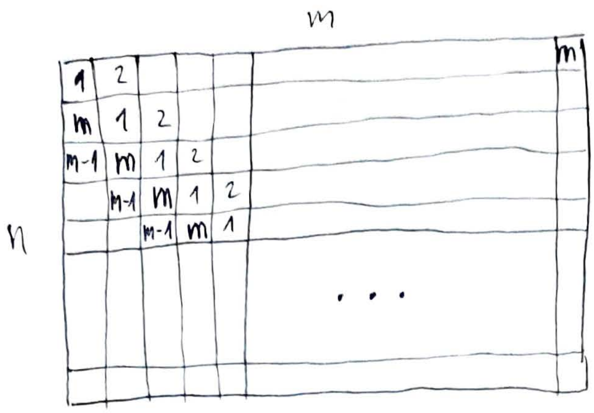
Chcemy mieć:

$\forall n \in \mathbb{N}$, p pierwsze: $f_p(n) - f_p(n-k) \geq f_p(k)$.

$$a \geq b$$
$$\lfloor a \rfloor \geq \lfloor b \rfloor + \lfloor a-b \rfloor$$
$$\lfloor b + (a-b) \rfloor \geq \lfloor b \rfloor + \lfloor a-b \rfloor$$

$$f_p(n) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{n-k}{p^j} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{p^j} \right\rfloor \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n-k}{p^j} \right\rfloor + \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{p^j} \right\rfloor = f_p(n-k) + f_p(k)$$

Zadanie 8. Na szachownicy $n \times m$, $n \le m$ umieszczono $m(k-1)+1$ wież. Pokaż, że istnieje k takich wież, które się wzajemnie nie atakują.



Numerujemy wiersze, kolumny i szufladki od 0,

$S_i = \{(j,\ i+j \bmod m) : 0 \le j \le n-1\}$

1. FAZA:

Dla $i = 1, \dots, k$, wybieramy dotychczas niewybraną kolumnę o największej liczbie wież i nazwijmy ją k_i.

Obserwacja: Kolumna k_i ma $\ge k+1-i$ wież.

Dowód: Gdy wybieramy i-tą kolumnę, w niewybranych kolumnach jest $\ge m(k-1)+1-(i-1)\cdot n$

$\ge m(k-i)+1$ wież.

Średnio na niewybraną kolumnę przypada

$$\ge \frac{m(k-i)+1}{m-i+1} \ge k-i+\frac{1}{m}$$

wież, więc istnieje niewybrana kolumna z $k-i+1$ wieżami. ■

2. FAZA:

Dla $i = 1, \dots, k$ z kolumny k_{k+1-i} wybierz 1 wieżę stojącą w innym wierszu niż każda z dotychczas wybranych. Jest to możliwe, bo w k_{k+1-i} jest $\ge i$ wież, a dotychczas wybraliśmy $i-1$. ■

Zadanie (egzamin): Rozważamy zbiory punktów $(x_i, y_i) \in \mathbb{Z}^2$.

(a) Wśród dowolnych 5 punktów istnieją 2 takie, że ich średnia arytmetyczna również należy do $\mathbb{Z}^2$.

(b) Wśród dowolnych 13 punktów istnieją 4 takie, że ich średnia arytmetyczna również należy do $\mathbb{Z}^2$.

(Ad. a) Rozważmy $(x_i \bmod 2, y_i \bmod 2)$. Mamy wtedy 5 punktów, a tylko 4 pary reszt: $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$. $\blacksquare$

(Ad. b) Z powyższego podpunktu wiemy, że mając $\overbrace{|A|}^{\text{zbiór } A} \geq 5$ punktów, to 2 z nich można usunąć, a do innego zbioru (B) dodać ich średnią $(\in \mathbb{Z}^2)$. Dla zbioru B powtarzamy rozumowanie.