Matematyka dyskretna M, Repetytorium 3, 21/10/2019

Zadanie 3.1.

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\lceil \log_2 k\rceil, \text{ wykazać } f(n)=n-1+f\left(\left\lceil \tfrac{n}{2}\right\rceil\right)+f\left(\left\lfloor \tfrac{n}{2}\right\rfloor\right) \text{ dla } n\geq 1.$$

$$f(n)=\sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\lceil \log_2 (2k-1)\rceil+\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\lceil \log_2 (2k)\rceil=$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1^\circ\ n=2m \Rightarrow \lceil \tfrac{n}{2}\rceil=m \\ 2^\circ\ n=2m-1 \Rightarrow \lceil \tfrac{n}{2}\rceil=m \end{array}\right\}$$

$$\log_2 (2k)=\log_2 2+\log_2 k=1+\log_2 k$$

dla $k=1$

$$=\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\left(1+\lceil \log_2 k\rceil\right)+(-1)+\sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\lceil \log_2 (2k)\rceil=$$

$$=\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil-1+\underbrace{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\lceil \log_2 k\rceil}_{f\left(\lfloor \frac{n}{2}\rfloor\right)}+\underbrace{\sum^{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\lceil \log_2 k\rceil}_{f\left(\lceil \frac{n}{2}\rceil\right)}=$$

$$=n-1+f\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\right)+f\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right)$$

Zadanie 3.2. Postać zwarta funkcji f z powyższego zadania.

Niech $n=2^k$. Wtedy:

(a) z zależności rekurencyjnej dostaniemy wzór na $f(n)$

(b) dla pozostałych n skorzystamy z definicji:

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\lceil \log_2 k\rceil$$

$$f\left(2^{\lceil \log_2 n\rceil}\right)=\sum_{k=1}^{2^{\lceil \log_2 n\rceil}}\lceil \log_2 k\rceil$$

$$f(n)=f\left(2^{\lceil \log_2 n\rceil}\right)-\sum_{k=n+1}^{2^{\lceil \log_2 n\rceil}}\lceil \log_2 k\rceil=$$

$$=f\left(2^{\lceil \log_2 n\rceil}\right)-\left(2^{\lceil \log_2 n\rceil}-n\right)\cdot\lceil \log_2 n\rceil$$

(ad. a) $f(2^k)=(2^k-1)+2\cdot f(2^{k-1})=(2^k-1)+2\left((2^{k-1}-1)+2f(2^{k-2})\right)=$

$$=(2^k-1)+(2^k-2)+4f(2^{k-2})=$$

$$=(2^k-1)+(2^k-2)+4\left((2^{k-2}-1)+2f(2^{k-3})\right)=$$

$$=(2^k-2^0)+(2^k-2^1)+(2^k-2^2)+2^3\cdot f(2^{k-3})$$

$$f(2^k) = \sum_{i=0}^{a-1}(2^k - 2^i) + 2^a \cdot f(2^{k-a})^{\,a \le k} \overset{a=k}{=} \sum_{i=0}^{k-1}(2^k - 2^i) + 2^k \cdot f(1) =$$

$$= k \cdot 2^k - 2^k + 1 \quad \blacksquare$$

Zadanie 3.15. $ax_0 + by_0 = c$ dla $a, b, c, x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$, określ zbiór wszystkich rozwiązań (x, y) równania $ax + by = c$.

Niech $x = x_0 + x'$, $y = y_0 + y'$:

$$ax + by = c \Rightarrow \underbrace{ax_0 + ax' + by_0}_{} + by' = c \Rightarrow ax' + by' = 0$$

$$c$$

$$\Rightarrow b \mid ax' \text{ oraz } a \mid by' \quad (\text{z } ax' = -by')$$

Zatem $\frac{b}{\gcd(a,b)} \mid x' \cdot \frac{a}{\gcd(a,b)}$, czyli $\frac{b}{\gcd(a,b)} \mid x'$ oraz analogicznie $\frac{a}{\gcd(a,b)} \mid y'$. Dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, para

$$\left(x_0 + k \cdot \frac{b}{\gcd(a,b)},\ y_0 - k \cdot \frac{a}{\gcd(a,b)}\right) \text{ jest rozwiązaniem, bo:}$$

$$ax + by = ax_0 + by_0 + k \cdot \underbrace{\frac{ab}{\gcd(a,b)}}_{= \mathrm{lcm}(a,b)} - k \cdot \frac{ab}{\gcd(a,b)} = ax_0 + by_0 = c$$

Zadanie 3.5. Wzór na n-tą potęgę $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \quad A^n = ?$$

$$A^2 = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} \qquad A^n = \begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix}$$

Dowód:

1° $n = 1$ $\quad A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

2° $$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}F_{n+1}+F_n & F_n+F_{n-1}\\ F_n+F_{n-1} & F_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}F_{n+2} & F_{n+1}\\ F_{n+1} & F_n\end{bmatrix}$$

Algorytm:

Jako F_n zwróć lewy górny wyraz A^{n-1}, przy czym A^{n-1} oblicz używając szybkiego potęgowania.

$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \varphi^n, \quad \log_2 F_n = \Theta(1) + n \log_2 \varphi = \Theta(n)$$

długość zapisu

Złożoność: ($T(n)$ - koszt wyznaczenia F_n)

$$T(n) \leq T\left(\frac{n}{2}\right) + \underbrace{8 \cdot M\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{liczba mnożeń}} + \underbrace{dn}_{\text{liczba dodawań}} \leq 8M\left(\frac{n}{2}\right) + dn + 8M\left(\frac{n}{4}\right) + d \cdot \frac{n}{2} + T\left(\frac{n}{4}\right) \leq \ldots$$

$$\leq dn \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right)}_{2} + 8M\left(\frac{n}{2}\right) + 8M\left(\frac{n}{4}\right) + \ldots + 8M(1) \leq$$

$$\leq 2dn + 8M\left(\frac{n}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right)$$ ← z zał. z zadania $\left(M(n) \geq 2M\left(\frac{n}{2}\right)\right)$

$$\leq \Theta(n + M(n)) \leq \Theta(M(n))$$

Zadanie 3.9. $T(n) \leq T(\lceil \frac{n}{5} \rceil) + T(\lceil \frac{7n}{10} \rceil) + cn$, $T(n) \leq c'n$

zał. $\forall n \in \mathbb{N}\ T(n) \geq 0$

1° Podstawa indukcji:

Nierówność zachodzi dla każdego $n \leq n_0$ i $c' = \max_{1 \leq n \leq n_0} \frac{T(n)}{n}$

2° Krok indukcyjny:

$$T(n) \leq c' \lceil \frac{n}{5} \rceil + c' \lceil \frac{7n}{10} \rceil + cn \leq c' \left(\frac{n}{5} + \frac{7n}{10} + 2 \right) + cn =$$

$$= n \left(\frac{9}{10} c' + c + \frac{2c'}{n} \right).$$

Chcemy, by $\frac{9}{10} c' + c + \frac{2c'}{n} \leq c' \Rightarrow \frac{1}{10} c' - \frac{2c'}{n} \geq c.$

$n \geq n_0 \geq 40$ (dowolne), wtedy $\frac{1}{10} c' - \frac{2c'}{n} \geq \frac{1}{20} c' \geq c$, czyli $c' \geq 20c$

Zadanie 3.3

Algorytm: Weź max. k takie, że $F_k \leq n$. Dodaj F_k do reprezentacji, $n := n - F_k$, kontynuuj.

$$F_k \leq n < F_{k+1}$$

$$n - F_k < F_{k+1}$$

k

$r_1 = 1 \ldots \quad \geq F_k$

$r_2 = 0 \ldots \quad \leq F_{k-1} + F_{k-3} + \ldots + F_2 \vee F_3 < F_k$ (z zadania 2.14.)