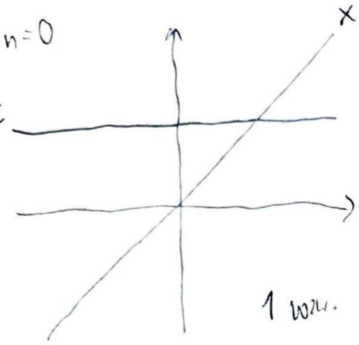
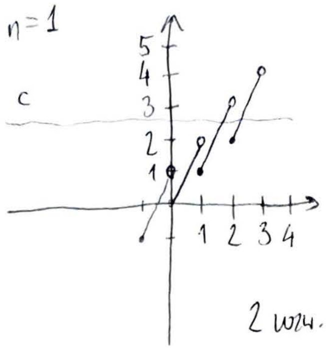
Zadanie 1.15

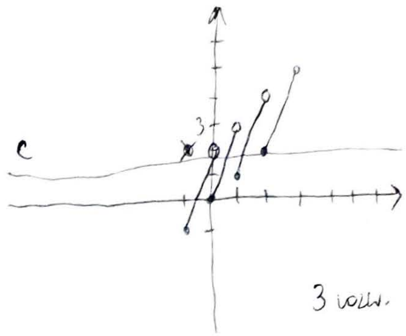
$\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ i $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil$ to l. całkowite najbliższe x

Ile rozwiązań x ma $(n+1)x - \lfloor nx \rfloor = c$?

Wykresy dla kolejnych n:







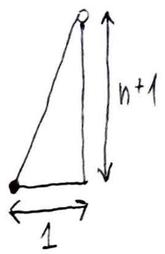
$f(x) = x$

Postać ogólna dla dowolnego n

$$\begin{cases} f(x) = (n+1)x - \lfloor nx \rfloor \\ \quad = [nx - \lfloor nx \rfloor] + x \\ \quad = x + \{nx\} \\ \quad = \lfloor x \rfloor + \{x\} + \{nx\} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$n=1: \ f(x) = x + \{x\}$
$\quad = \lfloor x \rfloor + 2\{x\}$



$f(x) = c \quad \Rightarrow \quad \{c\} = \{f(x)\} = \{\lfloor x \rfloor + \{x\} + \{nx\}\} = \{x\} + \{nx\}$

$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ oraz dla każdej $\{x\}$ t. że $\{f(\{x\})\} = \{c\}$

istnieje jedyna wartość $\lfloor x \rfloor$ t. że $f(x) = c$

~~[illegible]~~ $\forall y \in [0,1)$ t. że $\{f(y)\} = \{c\}$ istnieje dokładnie jedno $z \in \mathbb{Z}$

takie, że $f(z+y) = c$

Wtedy $f(z+y) = (n+1)(z+y) - \lfloor (z+y) \cdot n \rfloor$ ~~$= (n+1)z + (n+1)y - \lfloor ny \rfloor$~~

~~$= (n+1)z + y$~~

$= \lfloor z + y \rfloor + \{z+y\} + \{n(z+y)\} = z + y + \{nz\}$ ← bo $z \in \mathbb{Z}$

bo $y \geq 0$ oraz $y < 1$

$y + \{ny\}\}\} = \{c\}$

$$z + y + \{ny\} - \{y + \{ny\}\} = \lfloor c \rfloor$$

$$z = \lfloor c \rfloor - y - \{ny\} + \{y + \{ny\}\}$$

Ile rozw. ma równanie $\{f(y)\} = \{c\}$?

$\{\{ny\} + \{y\}\} = \{c\}$ Jedynym z rozwiązań jest $y_0 = \frac{\{c\}}{n+1}$, bo $y_0 < 1$,
$ny_0 < 1$,
czyli $\{ny_0\} = ny_0$
$\{y_0\} = y_0$.

Oprócz tego rozwiązania są też $y_i = \frac{\{c\} + i}{n+1}$ dla $i \in \mathbb{Z}$, $i \geq -\{c\}$,
$i < n+1 - \{c\}$

$$\left\{\left\{n \cdot \frac{\{c\}+i}{n+1}\right\} + \left\{\frac{\{c\}+i}{n+1}\right\}\right\} = \left\{\frac{\{c\}+i}{n+1} + \left\{\frac{n\{c\} + (n+1)i - i}{n+1}\right\}\right\}$$

$$= \left\{\frac{\{c\}+i}{n+1} + \left\{\frac{n\{c\} - i}{n+1}\right\}\right\}$$

Zadanie 1.3.

1) $f(x) = e^{x^2 + x \sin x}$

$g(x) = e^{x^2 + x \cos x}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = e^{x(\sin x - \cos x)}$$

1) nie $f = o(g)$:

dla $x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to e^x$$

2) nie $g = o(f)$:

dla $x = 2k \cdot \cancel{\frac{\pi}{2}} = k\pi$, $k \in \pi$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to e^{-x}$$

3) nie $f = \Theta(g)$ (i $g = \Theta(f)$)

z powyższych rozważań, ponieważ e^x nie jest ograniczone z góry przez żadną stałą

2)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
f_n	1	1	2	2	$6 = 3!$	6	$4!$	$4!$
g_n	1	2	2	6	6	$4!$	$4!$	$5!$

3) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – dowolny rosnący ciąg taki, że $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$

A – indeksy takie, że na A $\frac{f_n}{g_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

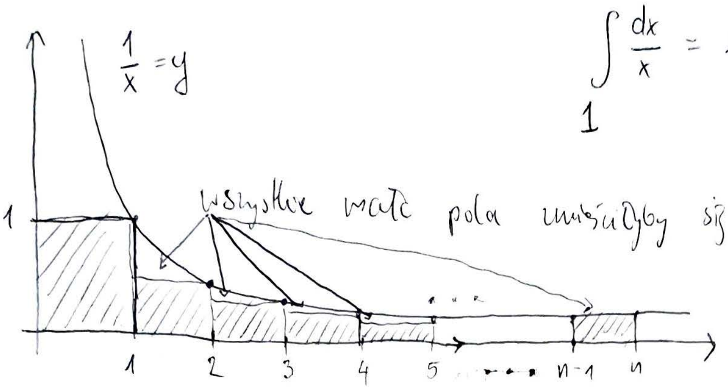
B – indeksy takie, że na B $\frac{f_n}{g_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

C – indeksy takie, że na C $c_1 \leq \frac{f_n}{g_n} \leq c_2$

Zadanie 1.10

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$



$$\ln x = \int_1^n \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} + 1 = \ln n + 1$$