Analiza numeryczna, Wykład 8, 04/12/2019

## Powtórka

$s$ – NIFS3, $t_0, t_1, \dots, t_n$

- $s(t_k) = y_k \quad (0 \le k \le n)$
- $s, s', s'' \in C[t_0, t_n]$
- $s|_{[t_{k-1}, t_k]} \in \Pi_3$
- $\underbrace{s''(t_0)}_{M_0} = \underbrace{s''(t_n)}_{M_n} = 0$

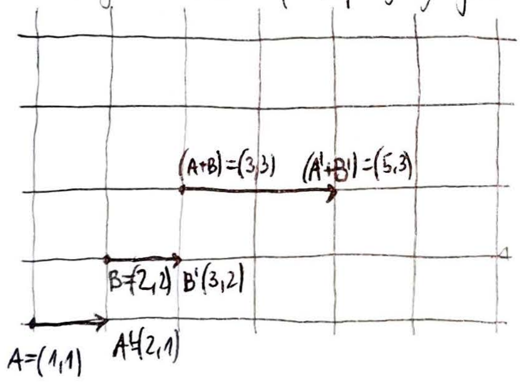
NIFS3 – zawsze istnieje i jest jednoznaczna

$t \in [t_{k-1}, t_k] \Rightarrow s(t) =$ Jawny wzór zależny od momentów $M_k := s''(t_k)$

Momenty spełniają układ równań trójprzekątniowy, który wyznaczamy w czasie $O(n)$.

## Krzywe Beziera

Dlaczego dodawanie po współrzędnych jest złe?




- Kombinacja barycentryczna punktów,
- kombinacja wypukła punktów,
- otoczka wypukła (najmniejszy wielokąt wypukły zawierający wszystkie punkty)

## Wielomiany Bernsteina

$$B^n_k(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad (n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, \dots, n)$$

$B^n_k$ – $k$-ty wielomian Bernsteina stopnia $n$

Podstawowe własności:

- $t \in [0,1] \Rightarrow B^n_k(t) \geq 0$
- wielomian $B^n_k$ ma dokładnie jedno ekstremum w przedziale $[0,1]$ dla $t = \frac{k}{n}$
- związek rekurencyjny: $B^n_k(t) = (1-t) B^{n-1}_k(t) + t B^{n-1}_{k-1}(t) \quad (0 \le k \le n)$

  [UWAGA: $B^p_q(t) \equiv 0$ dla $q > p$ lub $q < 0$]
- $\left(B^n_k(t)\right)' = n\left(B^{n-1}_{k-1}(t) - B^{n-1}_k(t)\right)$

- $\sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) \equiv 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- wielomiany $B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n$ tworzą bazę $\Pi_n$, tj. $\operatorname{lin}\{B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n\} = \Pi_n$

Definicja (krzywa Béziera)

Niech dane będą punkty na płaszczyźnie $W_0, W_1, \dots, W_n$.

Krzywą parametryczną postaci

$$P_n(t) := \sum_{k=0}^{n} W_k B_k^n(t) \qquad (t \in [0,1])$$

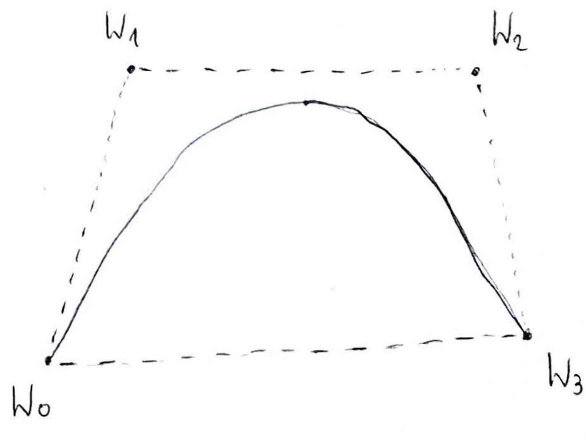
nazywamy krzywą Béziera stopnia $n$, a punkty $W_0, W_1, \dots, W_n$ - punktami kontrolnymi.

Uwagi:

Dla danego $t \in [0,1]$, $P_n(t)$ jest punktem na płaszczyźnie (dlatego, że $\sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) \equiv 1$, czyli mamy do czynienia z kombinacją barycentryczną punktów), co więcej punkt $P_n(t) \in \underbrace{\operatorname{conv}\{W_0, W_1, \dots W_n\}}_{\text{otoczka wypukła}}$ (bo $B_k^n(t) \geq 0$ dla $t \in [0,1]$).

Własności krzywych Béziera:

- $P_n(0) = W_0, \quad P_n(1) = W_n$
- $P_n(t) \in \operatorname{conv}\{W_0, W_1, \dots, W_n\} \quad (t \in [0,1])$
- $P_n'(0) = n(W_1 - W_0)$
- $P_n'(1) = n(W_n - W_{n-1})$



## Wyznaczanie punktu na krzywej Béziera

Zadanie: Dla danego $t \in [0,1]$ wyznaczyć punkt $P_n(t)$, gdzie

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} W_k B_k^n(t).$$

Rozwiązanie: **ALGORYTM DE CASTELJAU**

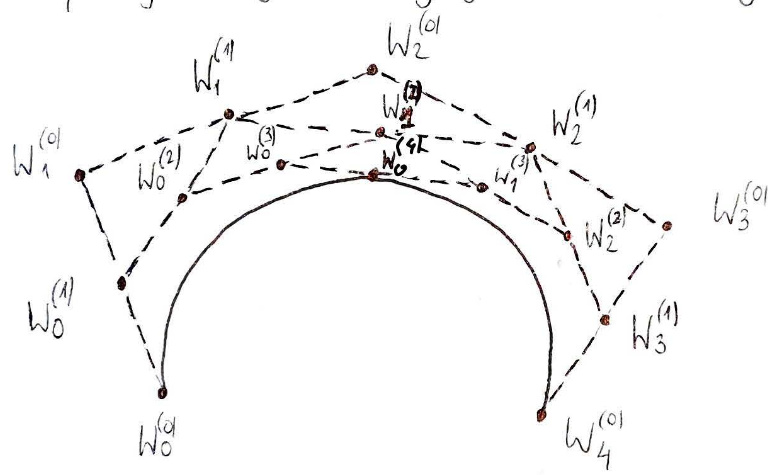
złożoność $O(n^2)$

1° $W_k^{(0)} := W_k \quad (0 \le k \le n)$

2° $W_k^{(i)} := (1-t)\, W_k^{(i-1)} + t\, W_{k+1}^{(i-1)} \quad (i = 0, 1, \ldots n;\ k = 0, 1, \ldots, n-1)$

Wtedy $P_n(t) = W_0^{(n)}$

## Interpretacja geometryczna algorytmu de Casteljau




$P_n\left(\frac{1}{2}\right) = ?$

Za każdym razem dzielimy odcinki między $W_k, W_{k+1}$ w stosunku $(1-t)$ do $t$, łączymy powstałe punkty i powtarzamy proces $n$ razy.