1. Uwarunkowanie zadania

Przykład: $w(x) = \prod_{j=1}^{20} (x-j) = \sum_{k=0}^{20} a_k x^k = \underbrace{1}_{a_{20}} \cdot x^{20} \underbrace{- 210}_{a_{19}} \cdot x^{19} + \ldots$

Perfidny wielomian Wilsona

$w_\varepsilon(x) = w(x) \pm \varepsilon \cdot x^{19}$ (ε - małe)

zaburzamy nieco współczynnik przy x^{19}

Wykresy $w(x)$ oraz $w_\varepsilon(x)$ można się różnią już dla $\varepsilon = 2^{-30}$, miejsca zerowe $w(x)$ są na $x = 1, 2, \ldots, 20$, a dla $w_\varepsilon(x)$ jest aż 6 miejsc zerowych w postaci liczb zespolonych.

Obserwacja: mała zmiana względna danych $\Rightarrow$ duża względna zmiana wyniku

Przykład:

$H_n := \left[\frac{1}{i+j-1}\right]_{i,j=1,2,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow \det(H_n) = ?$

macierz Hilberta

$\tilde{H}_n := \left[fl\left(\frac{1}{i+j-1}\right)\right]_{i,j=1,2,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow \det(\tilde{H}_n) = ?$

macierz typu Hilberta, w której zamiast wartości $\frac{1}{i+j-2}$ są ich odpowiedniki z $\underline{fl}$

dla $n=5$ błąd około 4%;

$n=15$: $\det(H_n) = 0.10 \cdot 10^{-123}$

$\det(\tilde{H}_n) = 0.48 \cdot 10^{-86}$,

błąd ponad 100%

Obserwacja: jak wyżej

Przykład: (1) $H_n x = b$, gdzie $b := H_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \rightarrow$ rozwiązanie $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

układ równań

(2) $\tilde{H}_n \tilde{x} = b$

Jak bardzo $\tilde{x}$ (rozwiązanie równania (2)) różni się od x (1)?

dla $n=5$ x_i $(i=1,2,\ldots,5)$ wyniki zbliżone do 1 (od. 0.97 do 1.03)

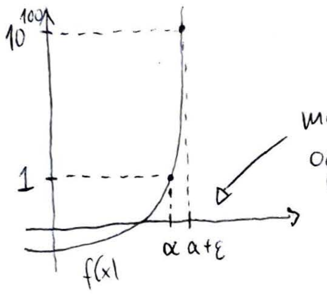
$n=15$ x_i $(i=1,2,\ldots,15)$ wyniki odległe o ponad 40

$n=25$ x_i $(i=1,2,\ldots,25)$ wyniki odległe o ponad 450

Definicja - zadanie źle uwarunkowane:

Zadania, w których mała względna zmiana danych powoduje duże względne zmiany wyniku nazywamy zadaniami źle uwarunkowanymi. Wielkości mówiące o tym w jaki sposób względna zmiana danych wpływa na względną wartość wyniku nazywamy wskaźnikami uwarunkowania. Zadania, które nie są źle uwarunkowane nazywamy dobrze uwarunkowanymi.

Intuicja:



mała zmiana argumentu powoduje ogromną zmianę wartości $f(x)$

Przykład: Zbadanie uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji f w danym punkcie x (h - małe)*:

$$\left|\frac{f(x)-f(x+h)}{f(x)}\right| = \underbrace{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|}_{\approx f'(x)} \cdot \left|\frac{h}{f(x)}\right| \overset{(*)}{\approx} \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \cdot |h| =$$

względna zmiana wyniku

względna zmiana danych

$$\left|\frac{(x+h)-x}{x}\right| = \left|\frac{h}{x}\right|$$

$$= \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right| \cdot \left|\frac{h}{x}\right|$$

wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji f w danym punkcie

względna zmiana danych

Przykład: Niech dane będą wektory $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ oraz $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Zbadamy wskaźnik uwarunkowania obliczenia iloczynu skalarnego wektorów:

$$S(a,b) := a^T b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Zmiana danych:

$$\tilde{a} := \begin{bmatrix} a_1(1+\varepsilon_1) \\ a_2(1+\varepsilon_2) \\ \vdots \\ a_n(1+\varepsilon_n) \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} b_1(1+\alpha_1) \\ b_2(1+\alpha_2) \\ \vdots \\ b_n(1+\alpha_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n : \quad \left| \frac{a_k - a_k(1+\varepsilon_k)}{a_k} \right| = |\varepsilon_k|, \quad \left| \frac{b_k - b_k(1+\alpha_k)}{b_k} \right| = |\alpha_k|$$

względna zmiana k-tej współrzędnej wektora a, b

Względna zmiana wyniku:

gdy α_i, β_i są małe, to iloczyn $\alpha_i \beta_i$ możemy pominąć

$$\left| \frac{S(a,b) - S(\tilde{a},\tilde{b})}{S(a,b)} \right| = \left| \frac{\sum_i a_i b_i - \sum_i a_i b_i (1+\alpha_i)(1+\beta_i)}{\sum_i a_i b_i} \right| =$$

$$= \left| \frac{\sum_i a_i b_i (\alpha_i + \beta_i)}{\sum_i a_i b_i} \right| \leq \frac{\sum_i |a_i b_i| |\alpha_i + \beta_i|}{\left| \sum_i a_i b_i \right|} \leq \max_i |\alpha_i + \beta_i| \frac{\sum |a_i b_i|}{\left| \sum_i a_i b_i \right|}$$

maksymalna sumaryczna względna zmiana danych

Wobec tego wielkość $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|}{\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right|}$ można uznać za wskaźnik uwarunkowania zadania obliczenia iloczynu skalarnego wektorów a, b.

Wnioski: Jeśli a_i, b_i są tego samego znaku dla $i = 1, 2, \dots, n$, to $\mathrm{Cond}(a,b) = 1$ (gdzie $\mathrm{Cond}(a,b)$ oznacza wskaźnik uwarunkowania) $\Rightarrow$ zadanie dobrze uwarunkowane.
Jeśli np. $\sum |a_i b_i| = 1$, a $\sum a_i b_i = 10^{-100}$, to $\mathrm{Cond}(a,b) = 10^{100}$, więc zadanie jest źle uwarunkowane.

Definicja: algorytm numerycznie poprawny:

Algorytm nazywamy numerycznie poprawnym, jeśli wynik jego działania w świecie fl może być zinterpretowany jako mało zaburzony wynik dokładny dla mało zaburzonych danych.

Przykład: Chcemy obliczyć wartość $A(a)$. Wybrany algorytm wykonany w świecie fl wyprodukuje:

$$fl(A(a)) = A(a(1+\beta))(1+\alpha)$$

małe zaburzenie danych (β) $\quad$ małe zaburzenie wyniku (α)

$\rightarrow$ algorytm numerycznie poprawny

Wnioski: (1) Uwarunkowanie zadania to cecha zadania i nic tego nie zmieni.

(2) Zadanie dobrze uwarunkowane + algorytm numerycznie poprawny = SUKCES

(3) Zadanie źle uwarunkowane + algorytm numerycznie poprawny = KŁOPOTY

Przykład: Niech dany będzie następujący algorytm obliczania iloczynu liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$:

```
I := x1
FOR i=2 TO n
   I := I * xi
RETURN (I)
```

Dla uproszczenia założymy, że $x_i = rd(x_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, x_i – liczby maszynowe.

$$fl(I) = ((((x_1 \cdot x_2)(1+\varepsilon_1) \cdot x_3)(1+\varepsilon_2) \cdot \ldots) \cdot x_n)(1+\varepsilon_{n-1}) =$$

$$= (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\ldots(1+\varepsilon_{n-1}) =$$

$$= (x_1(1+\varepsilon_1))(x_2(1+\varepsilon_2))\ldots(x_{n-1}(1+\varepsilon_{n-1})) \cdot x_n =$$

$$= I(x_1(1+\varepsilon_1), x_2(1+\varepsilon_2), \dots, x_{n-1}(1+\varepsilon_{n-1}), x_n)$$

wynik dokładny dla mało zaburzonych danych,

JEST TO ALGORYTM NUMERYCZNIE POPRAWNY