Analiza numeryczna, Lista 12, 21/01/2020

Zadanie 1. Mogąc liczyć $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ chcemy liczyć $\int_a^b g(x)\,dx$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left\{ \begin{aligned} y &= -1 + 2\,\frac{x-a}{b-a} \\ dy &= \frac{2}{b-a}\,dx \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{y+1}{2}(b-a) + a \\ dx &= \tfrac{1}{2}(b-a)\,dy \end{aligned} \right\} =$$

$$= \int_{-1}^{1} f\left(\frac{y+1}{2}(b-a)+a\right)\cdot \frac{1}{2}(b-a)\,dy = \frac{1}{2}(b-a)\int_{-1}^{1} f\left(\frac{y+1}{2}(b-a)+a\right)dy$$

Zadanie 3. Rząd $Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ nie przekracza $2n+2$.

$I(f) \neq Q_n(f)$

Zbudujmy wielomian Π_{2n+2} dla którego $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ nie zachodzi. Weźmy funkcję $f(x) = \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2 \in \Pi_{2n+2}$ dla której zachodzi $f(x) \geq 0$. Mamy wtedy $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ (równość tylko dla miejsc zerowych). Z drugiej strony mamy $Q_n(f) = \sum A_k f(x_k) = 0$, gdyż x_k są miejscami zerowymi wielomianu, więc ta kwadratura nie jest dokładna.

Zadanie 4. Uproszczenie wzoru interpolacyjnego Lagrange'a dla równoodległych węzłów.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \overset{x_k = a + \frac{b-a}{n}k}{\underset{\text{(podstawienie)}}{=}} \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-\left(a+\frac{b-a}{n}j\right)}{\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)-\left(a+\frac{b-a}{n}j\right)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-a-\frac{b-a}{n}j}{\frac{b-a}{n}(i-j)} \overset{h=\frac{b-a}{n}}{\underset{\text{(podstawienie)}}{=}} \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-a-hj}{h(i-j)} \overset{x=a+th}{\underset{\text{(podstawienie)}}{=}}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{a+th-a-hj}{h(i-j)} = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t-j}{i-j}$$

Zadanie 6. Niech A_k będą współczynnikami kwadratury Newtona - Cotesa, udowodnij, że $\frac{A_k}{b-a}$ są liczbami wymiernymi.

$$A_k = h\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j}\,dt, \qquad t=\frac{x-a}{h}, \quad h=\frac{b-a}{n}$$

$$\frac{A_k}{b-a} = \frac{h}{b-a}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j}\,dt = \frac{1}{n}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{t-j}{k-j}\,dt$$

Skoro $n\in\mathbb{N}$, $k=0,1,\dots,n$ oraz $j=0,\dots,k-1,k+1,\dots,n$, to $\left\{\frac{1}{k-j},\frac{1}{n}\right\}\in\mathbb{Q}$.

Weźmy więc całkę bez tych wyrazów:

$$\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (t-j)\,dt = \int_0^n \big(t(t-1)(t-2)\dots(t-k-1)(t-k+1)\dots(t-n)\big)\,dt =$$

$$= \int_0^n \left(a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \dots + a_0\right)dt =$$

$$= \int_0^n a_{n-1}t^{n-1}\,dt + \dots + \int_0^n a_0\,dt =$$

$$= -a_{n-1}\frac{n^n}{n} - a_{n-2}\frac{n^{n-1}}{n-1} - \dots - a_0\frac{n^1}{1}$$

A więc skoro $n\in\mathbb{N}$, $a_i\in\mathbb{Z}$, to całka jest wymierna, a więc

$$\frac{A_k}{b-a}\in\mathbb{Q}.$$

Zadanie 2.

$\Rightarrow$ zakładamy, że Q_n jest interpolacyjna: $Q_n(f) = \int_a^b L_n(x)\,dx$.

Niech $w \in \Pi_n$, $w(x) \equiv L_n^w(x) \Rightarrow$ rząd $(Q_n) \geq n+1$

$\Leftarrow$ zakładamy, że rząd $(Q_n) \geq n+1$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x) \qquad \lambda_i(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \Rightarrow \begin{array}{l} k\neq i \\ \lambda_i(x_k)=0 \\ \lambda_i(x_i)=1 \end{array}$$

Niech $f(x) = \lambda_i(x) \in \Pi_n$, wtedy: $\int_a^b \lambda_i(x)\,dx = Q_n(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n} A_k \lambda_i(x_k) =$

$$= \underbrace{A_i \cdot \lambda_i(x)}_{1} = A_i$$

$\blacksquare$

Zadanie 5.

$$A_k = \int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} (t-i)\,dt \cdot \overbrace{\frac{h}{k!\,(-1)^{n-k}\,(n-k)!}}^{A} = \left\{\begin{array}{l} t=n-u \\ dt=-du \end{array}\right\} = \int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} (n-u-i)\,du \cdot A = (*)$$

$$A_{n-k} = \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\j\neq n-k}}^{n} (t-j)\,dt \cdot \frac{h}{k!\,(-1)^{k}(n-k)!}$$

$$(*) = (-1)^n \int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} (u-(n-i))\,du \; \frac{h\,(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!}$$