Analiza numeryczna (L) — Lista 1, 8/10/2019

Zadanie 1. $f(x) = 4038\,\frac{1-\cos x}{x^2}$

Wyniki powinny dążyć do wartości $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(4038\,\frac{1-\cos x}{x^2}\right) =$

$$= 4038\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2} = 4038\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{2x} = 4038\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{2} = 4038\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{2019}}$$

$\frac{0}{0}$, więc używam reguły de l'Hospitala.

Używając wartości 10^{-i} dla $i = 11, \ldots, 20$ otrzymamy niepoprawne wyniki dla pojedynczej i podwójnej precyzji, poprawne (w oszacowaniu) wyniki otrzymamy dla floatów dla $i = \{1, 2\}$, a dla double $i = \{1, 2, \ldots, 7\}$.

Zadanie 2. $x_0 = 1 \quad x_1 = \frac{1}{3} \quad x_n = \frac{1}{3}\cdot(-299\cdot x_{n-1} + 100\,x_{n-2})$ dla $n = 2, 3, 4, \ldots$

Kolejne wartości ciągu $\{x_n\}$: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

Można stąd wywnioskować, że wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu x_n to $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$, dzięki czemu łatwiej nam porównać czy wyniki otrzymane na komputerze są wiarygodne. Niestety dla liczb w pojedynczej precyzji prawidłowy (w przybliżeniu) wynik otrzymamy jedynie do x_3 $\left(0.03713\ldots, \text{ a } \frac{1}{27} = 0.(037)\right)$, a dla podwójnej precyzji do x_7 $\left(0.000425\ldots, \text{ a } \frac{1}{2187} = 0.000457\right)$.
Późniejsze wyniki są błędne ze względu na operacje na zbyt małych liczbach i korzystniejsze byłoby wykorzystanie liczb całkowitych do utworzenia struktury ułamka, aby uniknąć niepoprawnych obliczeń.

$$x_n + \frac{299}{3}x_{n-1} - \frac{100}{3}x_{n-2} = 0$$

$$\frac{1}{3^n} + \frac{299}{3^n} - \frac{100}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^n}(1 + 299 - 300) = 0$$

Zadanie 3.

Całki dane wzorem $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2019}\,dx$ dla $n \in \mathbb{N}$ powinny spełniać rekurencyjną zależność:

$$J_n + 2019\, J_{n-1} = \frac{1}{n} \qquad \left(n = 1, 2, \dots;\ J_0 = \ln\frac{2020}{2019}\right)$$

Sprawdzamy to w pokazany poniżej sposób (tzn. podstawiając równanie, a dokładniej jego lewą stronę dla danych n oraz $n-1$):

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x+2019}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+2019}\,dx \cdot 2019 =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n + 2019\,x^{n-1}}{x+2019}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(2019+x)}{x+2019}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}\,dx =$$

$$= \frac{x^n}{n}\Big|_0^1 = \frac{1^n}{n} - \frac{0^n}{n} = \frac{1}{n} \quad \blacksquare$$

W programie obliczane wartości całki są prawidłowe do $n=3$, późniejsze wartości bardzo różnią się od oczekiwanych wartości, aż w pewnym momencie przyjmują ujemne wartości, co przeczy zależności rekurencyjnej z zadania.

Zadanie 4.

$$\pi = 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \underbrace{\frac{1}{2k+1}}_{a_n}$$, obliczamy dla błędu $\leq 10^{-5}$.

Wykorzystując kryterium Leibniza dla szeregów naprzemiennych wiemy, że powyższy szereg jest zbieżny, ponieważ $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Używając szacowania $|S - S_n| \leq a_n$ dla $S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ oraz $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$ mamy:

$$4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{4}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$$

$$\frac{4}{2k+1} = a_k \leq 10^{-5}$$

$$\frac{4}{10^{-5}} \leq 2k+1$$

$$400000 \leq 2k+1$$

$$\frac{399999}{2} \leq k \Rightarrow k \geq 200000$$

Stąd mamy, że obliczenie π z błędem mniejszym niż 10^{-5} wymaga 200000 iteracji, co nie jest zbyt optymalnym rozwiązaniem.

Zadanie 5.

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(x-1)^k}{k}$$

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

(1) $$\left| (-1) \cdot \frac{(2-1)^k}{k} \right| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \Rightarrow k > 2 \cdot 10^{6}$$

(2) $$\ln\left(e \cdot \frac{2}{e}\right) = \ln e + \ln \frac{2}{e} = 1 + \ln \frac{2}{e}$$

$$\ln \frac{2}{e} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\left(\frac{2}{e}-1\right)^k}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(-1)^k \left(1-\frac{2}{e}\right)^k}{k}$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{2}{e}\right)^k}{k}$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{2}{e}\right)^k}{k}, \quad S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{2}{e}\right)^k}{k} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{e}\right)^k \overset{(*)}{=} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\left(1-\frac{2}{e}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{e}\right)}$$

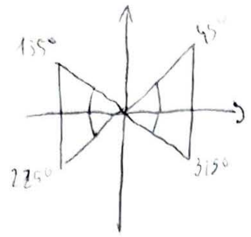
$$\leq \frac{1}{2} \cdot 10^{6}$$

(*) $$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

zaczyna działać od $n = 9$ wzwyż

Zadanie 6.

Wartości $\sin x$ będą dobrze obliczane dla:



$\sin \alpha$ znane dla $|\alpha| = \frac{\pi}{4}$, czyli $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\underline{\underline{\beta = \frac{\pi}{4}}} \Rightarrow \cos \frac{\alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\sin \alpha + \sin \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\alpha + \frac{\pi}{4}}{2}}$$

Od wzoru:

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2 \sin \alpha \sin(90-\beta)$$

$$\beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \alpha \underbrace{\sin \frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \approx \sqrt{2} \sin \alpha$$

Zadanie 7.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\text{definicja } f'(x)} + \frac{1}{2} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right)$$

$$= \frac{1}{2} f'(x) + \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}}_{} = (t = -h)$$

$$DF = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

$$= \dots \lim_{t \to 0} \frac{f(x) - f(x+t)}{-t}$$

szereg Taylora

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f^{(2)}(x)}{2} \cdot h^2 + \dots$$

$$f(x-h) = f(x) - h \cdot f'(x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2} \cdot h^2 - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \dots$$

$$DF = f'(x) + \frac{h}{2} \cdot f^{(2)}(\eta)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{3!} f^{(2)}(x) + \frac{h^4}{5!} f^{(4)}(x) + \frac{h^6}{7!} f^{(6)}(x) + \dots$$