http://www.ii.uni.wroc.pl/~pwo/An/an-L-lista-08.pdf

# Ćwiczenia
# z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 8

20 listopada 2019 r.

Zajęcia 3 grudnia 2019 r.
Zaliczenie listy **od 4 pkt.**

**L8.1.** 1 punkt Znajdź naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia dla danych

a) $\begin{array}{c||c|c|c} x_k & -3 & 0 & 3 \\ \hline y_k & -2 & 1 & 2 \end{array}$ ,  b) $\begin{array}{c||c|c|c|c} x_k & -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline y_k & -2 & -1 & 3 & 6 \end{array}$ .

**L8.2.** 1 punkt Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 9x & \text{dla} \quad -1 \le x \le 0, \\ -5x^3 + 3x^2 + 9x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1, \\ 5x^3 - 27x^2 + 39x - 10 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2, \\ -x^3 + 9x^2 - 33x + 38 & \text{dla} \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

jest naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia?

**L8.3.** 1 punkt Czy istnieją takie stałe $a$, $b$, $c$, $d$, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{dla} \quad -2 \le x \le -1, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{dla} \quad -1 \le x \le 1, \\ -6x & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

jest naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia?

**L8.4.** 1 punkt Niech $s$ będzie naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia interpolującą funkcję $f$ w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$. Jak wiemy, *momenty* $M_k := s''(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ spełniają układ równań

(1) $$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = d_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

gdzie $M_0 = M_n = 0$ oraz

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}], \quad \lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1}), \quad h_k := x_k - x_{k-1}.$$

Sformułuj i uzasadnij oszczędny algorytm rozwiązywania układu (1). Jaki jest koszt jego realizacji?

**L8.5.** 2 punkty Niech dane będą wektory $\mathtt{x}:=[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ $(x_k < x_{k+1},\ 0 \le k \le n-1)$, $\mathtt{y}:=[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ oraz $\mathtt{z}:=[z_0, z_1, \ldots, z_m]$. Niech $s_n$ oznacza naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie*: NFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ $(0 \le k \le n)$. W języku `PWO++` procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor

$$\mathtt{Z} := [s_n(z_0), s_n(z_1), \ldots, s_n(z_m)],$$

z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej $f$ znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \cdots < x_{100}$. Wiadomo, że NFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ $(0 \le k \le 100)$ bardzo dobrze przybliża funkcję $f$ w przedziale $[x_0, x_{100}]$. Wywołując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości

$$f'(h_0),\ f'(h_1), \ldots,\ f'(h_N),$$

gdzie $x_0 \le h_0 < h_1 < \ldots < h_N \le x_n$, natomiast $N$ jest **dowolną** liczbą naturalną.

**L8.6.** **Włącz komputer!** | 2 punkty | Niech $s_x$ i $s_y$ będą naturalnymi funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia spełniającymi następujące warunki interpolacyjne:

$$s_x(t_k) = x_k, \quad s_y(t_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 27),$$

gdzie $t_k := \frac{k}{27}$ $(k = 0, 1, \ldots, 27)$, natomiast

$$[x_0, x_1, \ldots, x_{27}] := [15.5, 12.5, 8, 10, 7, 4, 8, 10, 9.5, 14, 18, 17, 22, 25, 19, 24.5, 23, 17, 16, 12.5, 16.5, 21, 17, 11, 5.5, 7.5, 10, 12],$$

$$[y_0, y_1, \ldots, y_{27}] := [32.5, 28.5, 29, 33, 33, 37, 39.5, 38.5, 42, 43.5, 42, 40, 41.5, 37, 35, 33.5, 29.5, 30.5, 32, 19.5, 24.5, 22, 15, 10.5, 2.5, 8, 14.5, 20].$$

Opracuj **własną implementację** wyznaczania interpolacyjnej naturalnej funkcji sklejanej trzeciego stopnia. Następnie użyj jej do narysowania łamanej łączącej punkty

$$(s_x(u_0), s_y(u_0)), (s_x(u_1), s_y(u_1)), \ldots, (s_x(u_M), s_y(u_M)),$$

gdzie $u_k := \frac{k}{M}$ $(k = 0, 1, \ldots, M)$, a $M$ jest odpowiednio dużą liczbą naturalną. Co przedstawia ta łamana?

---

**L8.7.** **Dodatkowe zadanie programistyczne** (do 18 grudnia; do 8 punktów) [1]

Jest rok 2284. Autonomiczny latający dron *Floty Naukowej* został wysłany na misję do puszczy na odległej planecie, aby zbierać dokumentację o lokalnej faunie i florze. Na polanach tej puszczy żyje rdzenna ludność o mniej zaawansowanym poziomie rozwoju kulturalnego i technologicznego. *Podstawowa Zasada Badawcza Floty Naukowej* (nazywana dalej *PZB*) zakazuje zakłócania ewolucji kulturowej innych gatunków. Takim zakłóceniem niewątpliwie byłoby pojawienie się drona na niebie nad polaną. Dlatego drony zaprogramowano tak, aby nie zostały zauważone, a dokładniej – aby unikały obszarów w kształcie koła, w których znajdują się polany.

Pewnego dnia odnaleziono krytyczny błąd oprogramowania drona, przez który nie ma pewności, że wybrana trasa faktycznie unikała zakazanych obszarów. Jedyne wiarygodne informacje o położeniu i ruchu drona to zapisywane w określonych odstępach czasu położenie i prędkość. Zespół operatorek i operatorów drona próbuje ustalić, czy doszło do złamania *PZB*.

Analizując sytuację, jedna z osób przypomniała sobie, że wielomian interpolacyjny można konstruować nie tylko w oparciu o wartości funkcji w węzłach, ale również wykorzystując informacje o wartościach jej pierwszej i kolejnych pochodnych w tych węzłach.

[1] Patrz pkt. 12. regulaminu zaliczania ćwiczeń.

Taki rodzaj interpolacji nazywamy *interpolacją Hermite'a*. Zobacz np. [1, §4.3.1], [2, §2.4].

(a) Sformułuj zadanie interpolacji wielomianowej Hermite'a i udowodnij, że ma ono zawsze jednoznaczne rozwiązanie.

(b) Zapoznaj się z oszczędnymi algorytmami wyznaczania *postaci Newtona* wielomianu interpolacyjnego Hermite'a i potrzebnych do tego tzw. *uogólnionych ilorazów różnicowych*.

(c) Trajektorię ruchu drona w czasie można opisać na płaszczyźnie (dla uproszczenia przyjmujemy, że dron przeprowadza badania na stałej wysokości) przy pomocy krzywej parametrycznej

$$\gamma(t) := \{(x(t), y(t)) \ : \ t \geq 0\} \qquad (t - \text{czas}).$$

Dla zadanych: liczb rzeczywistych $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ (czas), wartości funkcji $x(t_0), y(t_0), x(t_1), y(t_1), \ldots, x(t_n), y(t_n)$ (położenie drona) oraz ich pochodnych $x'(t_0), y'(t_0), x'(t_1), y'(t_1), \ldots, x'(t_n), y'(t_n)$ (prędkość drona), opracuj algorytm konstrukcji postaci Newtona wielomianów Hermite'a $H_x, H_y \in \Pi_{2n+1}$ spełniających następujące warunki:

$$H_x(t_k) = x(t_k), \quad H_x'(t_k) = x'(t_k), \quad H_y(t_k) = y(t_k), \quad H_y'(t_k) = y'(t_k)$$

$(k = 0, 1, \ldots, n)$. Sprawdź **dla wielu doborów** interpolowanych funkcji $x, y$ oraz węzłów $t_k$ działanie tego rodzaju interpolacji w praktyce.

(d) Pora przekonać się, czy doszło do złamania *PZB*. Dla zadanych $t_i := t_0 + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ h, t_0 > 0$ – ustalone), położenia drona (wartości $x(t_i), y(t_i)$) i jego prędkości (wartości $x'(t_i), y'(t_i)$) $(0 \leq i \leq n)$ oraz *obszarów zakazanych* $K_0, K_1, \ldots, K_m$ $(m \in \mathbb{N})$ będących kołami o środkach odpowiednio w punkach $z_j := (z_j^x, z_j^y)$ i promieniach $r_j > 0$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$, określ – wykorzystując interpolację wielomianową Hermite'a – czy dron złamał *PZB*.

**Wykonaj szczegółowe testy** dla różnych trajektorii drona i różnych zestawów obszarów zakazanych.

## Literatura


[1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.

[2] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 1., WNT, 1988.


Autor zadania: *Filip Chudy*.

*(–) Paweł Woźny*