Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 7

13 listopada 2019 r.

Zajęcia 19 listopada 2018 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

L7.1. 1 punkt Sprawdź, że wielomian $L_n \in \Pi_n$ interpolujący funkcję f w parami różnych $n+1$ węzłach $x_0, \ldots, x_n$ można zapisać w postaci

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{p_{n+1}(x)}{(x - x_k)p'_{n+1}(x_k)},$$

gdzie $p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

L7.2. 1 punkt Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego dla następujących danych:

a)

x_k	-3	-1	0	1
y_k	-8	0	-8	16

,

b)

x_k	0	1	2	-1	-3
y_k	-8	16	102	0	-8

.

L7.3. 1 punkt Ile i jakich operacji arytmetycznych należy wykonać, aby dla danych parami różnych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ obliczyć ilorazy różnicowe

$$f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, x_1, \ldots, x_n]? \tag{1}$$

Podaj pseudokod algorytmu wyznaczającego ilorazy różnicowe (1), którego złożoność pamięciowa wynosi $O(n)$.

L7.4. 1 punkt Korzystając z wiedzy z analizy matematycznej, znajdź takie wartości parametrów $a, b > 0$, by wyrażenia

$$\max_{x \in [-1,1]} |(x-a)(x+a)|, \qquad \max_{x \in [-1,1]} |(x-b)x(x+b)|$$

przyjmowały najmniejszą możliwą wartość. Jakie i dlaczego płyną stąd wnioski dla sposobu wyboru węzłów interpolacji?

L7.5. **Włącz komputer!** 1 punkt Przy pomocy programu umożliwiającego rysowanie wykresów funkcji, przygotuj wykresy wielomianów

$$p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \qquad (n = 4, 5, \ldots, 20)$$

dla x_k $(0 \le k \le n)$ będących węzłami równoodległymi w przedziale $[-1, 1]$. Jaka prawidłowość zachodzi dla ekstremów lokalnych tych wielomianów? Dlaczego tak się dzieje? Następnie powtórz eksperyment dla *węzłów Czebyszewa*. Skomentuj wyniki porównując odpowiednie wykresy. Jakie i dlaczego płyną stąd wnioski dla sposobu wyboru węzłów interpolacji?

L7.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Funkcję $f(x) = \ln(x/2 - 1)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w pewnych $n+1$ różnych punktach przedziału $[4, 5]$. Jak należy dobrać n, aby mieć pewność, że

$$\max_{x\in[3,4]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-8} \ ?$$

L7.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Funkcję $f(x) = e^{\frac{3x}{4}}$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa T_{n+1}. Jak należy dobrać n, aby mieć pewność, że

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-16} \ ?$$

L7.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Jak wiadomo, język programowania `PWO++` ma bogatą bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich jest m.in. procedura `DD_Table(x,f)` znajdująca z dokładnością bliską maszynowej **ilorazy różnicowe** $f[x_0]$, $f[x_0, x_1]$, …, $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, gdzie `x`$:= [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ jest wektorem parami różnych liczb rzeczywistych, a `f` – daną funkcją. Niestety procedura ta ma pewną wadę, mianowicie n **musi być mniejsze** niż 21. W jaki sposób, wykorzystując procedurę `DD_Table` **tylko raz**, można **szybko** wyznaczyć ilorazy różnicowe $f[z_0]$, $f[z_0, z_1]$, …, $f[z_0, z_1, \ldots, z_{20}]$, $f[z_0, z_1, \ldots, z_{20}, z_{21}]$, gdzie $z_i \ne z_j$ dla $i \ne j$, $0 \le i, j \le 21$.

Uwagi. Rozwiązania, w których **dwukrotnie** używa się procedury `DD_Table` lub wykorzystuje się **jawny wzór** na iloraz różnicowy **nie wchodzą w grę**.

(–) Paweł Woźny