Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 2

9 października 2019 r.

Zajęcia 15 października 2019 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L2.1. 1 punkt Ustalmy liczbę $B \in \{2,3,4,\ldots\}$. Pokaż, że każda niezerowa liczba rzeczywista x ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $x = smB^c$, gdzie $s = \operatorname{sgn} x$, $c \in \mathbb{Z}$, $m \in [\frac{1}{B}, 1)$.

L2.2. 1 punkt Znajdź wszystkie liczby zmiennopozycyjne, które można przedstawić w postaci

$$x = \pm(0.1e_{-2}e_{-3}e_{-4})_2 \cdot 2^{\pm c}, \qquad e_{-2}, e_{-3}, e_{-4}, c \in \{0,1\}, \tag{1}$$

gdzie $(\ldots)_2$ oznacza zapis dwójkowy. Jaki jest najmniejszy przedział $[A, B]$, zawierający te liczby? Jak liczby (1) rozkładają się w $[A, B]$ (wykonaj odpowiedni rysunek)? Co z tego wynika?

L2.3. 1 punkt *Zaokrągleniem* niezerowej liczby rzeczywistej $x = sm2^c$, gdzie $s = \operatorname{sgn} x$, c jest liczbą całkowitą, a $m \in [\frac{1}{2}, 1)$, jest liczba zmiennopozycyjna $\operatorname{rd}(x) = sm_t^r 2^c$, gdzie $m_t^r \in [\frac{1}{2}, 1)$ oraz $| m - m_t^r | \le \frac{1}{2}2^{-t}$. Wykaż, że

$$\frac{|\operatorname{rd}(x) - x|}{|x|} \le 2^{-t}.$$

L2.4. 1 punkt Zapoznaj się ze standardem IEEE 754[1] reprezentacji liczb zmiennopozycyjnych. Omówi go krótko i podaj główne różnice w stosunku do modelu teoretycznego reprezentacji liczb maszynowych przedstawionego na wykładzie.

L2.5. 1 punkt Załóżmy, że x, y są liczbami maszynowymi. Podaj przykład pokazujący, że przy obliczaniu wartości $d := \sqrt{x^2 + y^2}$ algorytmem postaci

```
u:=x*x;
u:=u+y*y;
d:=sqrt(u)
```

może wystąpić zjawisko nadmiaru, mimo tego, że szukana wielkość d należy do zbioru X_{fl}. Następnie zaproponuj `algorytm` wyznaczania d pozwalający unikać zjawiska nadmiaru, jeśli $\sqrt{2}\max(|x|, |y|) \in X_{\mathrm{fl}}$. Na koniec podaj skuteczną metodę wyznaczania długości euklidesowej wektora $v \in \mathbb{R}^n$.

[1] Patrz np. http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754

L2.6. $\boxed{\textsf{\textbf{Włącz komputer!}}}\boxed{\textsf{1 punkt}}$ Niech dana będzie funkcja $f(x) = 4038\dfrac{\sqrt{x^{11}+1}-1}{x^{11}}$. Napisz program, który działając w trybie podwójnej precyzji obliczy wartość $f(0.01)$. Czy wynik jest wiarygodny? Jeśli nie, to dlaczego i co można na to poradzić?

L2.7. $\boxed{\textsf{\textbf{Włącz komputer!}}}\boxed{\textsf{1 punkt}}$ Można wykazać, że przy $x_1 = 2$ ciąg

$$x_{k+1} = 2^k\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-(x_k/2^k)^2}\right)} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

jest zbieżny do π. Czy podczas obliczania kolejnych wyrazów tego ciągu przy pomocy komputera może wystąpić zjawisko utraty cyfr znaczących? Jeśli tak, to zaproponuj inny sposób wyznaczania wyrazów ciągu (2) pozwalający uniknąć wspomnianego zjawiska. Przeprowadź odpowiednie **testy obliczeniowe**.

L2.8. $\boxed{\textsf{\textbf{Włącz komputer!}}}\boxed{\textsf{2 punkty}}$ Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażeń

a) $x^7 + \sqrt{x^{14}+2019}$, **b)** $x^{-7}(\sin x - x + x^3/6 - x^5/120)$,

może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposoby obliczenia wyniku dokładniejszego. Sprawdź czy sposoby te **działają w praktyce**.

(–) Paweł Woźny