

Analiza numeryczna – kolokwium 2019

1. [3.4] Udowodnić, że wskaźnik uwarunkowania funkcji zadany jest wzorem $\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$ oraz sprawdzić, czy funkcja zadana wzorem $f(x) := \sin(2x)$ jest dobrze uwarunkowana.
2. [4.8] Opracować szybki i poprawny algorytm obliczania $\sqrt[4]{a}$ używający jedynie operacji (+, -, ·, /).
3. [6.1] Udowodnić, że funkcja w postaci potęgowej ($\sum_{k=0}^n a_k x^k$) może zostać wyrażona jako schemat Hornera, następnie udowodnić, że schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.
4. [7.2] Podać wielomian interpolacyjny w postaci Newtona dla odpowiednio (a) $x_i = \{-2, -1, 1, 2\}$, $y_i = \{3, 1, 0, 120\}$ oraz (b) $x_i = \{-2, -1, 1, 2, 0\}$, $y_i = \{3, 1, 0, 120, 6\}$ – do obliczenia podpunktu (b) należy wykorzystać obliczenia z podpunktu (a).
5. [7.7] Jakiego stopnia powinien być wielomian L_n interpolujący funkcję $f(x) := e^{2x}$ węzłami Czebyszewa na przedziale $x \in [-2, 2]$, aby spełnione było $\max_{x \in [-2, 2]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-2}$?
6. [7.8] W języku PWO++ istnieje funkcja `InterpPower(x,f)` obliczająca współczynniki funkcji w postaci potęgowej, gdzie $x := [x_0, x_1, \dots, x_n]$ jest wektorem parami różnych liczb rzeczywistych, a f – daną funkcją (która też była przedstawiona jako wektor), jednak działa ona jedynie dla wielomianów stopnia n mniejszego niż 31. Zaproponuj sposób obliczenia współczynników funkcji po dodaniu kolejnej obserwacji, aby maksymalnie raz wykorzystać funkcję `InterpPower(x,f)`.