Macierzowa metoda rozwiązywania zadań 4-7

Zadania 4-7 polegają na wyznaczeniu wartości stałych stosując aproksymację średniokwadratową.

Metoda z wykładu (dosyć żmudna):

Naszym modelem dla funkcji $y = ax + b$ jest:

$$F \coloneqq \{ax + b : a, b \in \mathbb{R}\} \equiv \Pi_1$$

Pomiarami w naszym modelu są punkty (x_k, y_k):

x_k	0	10	20	30	40	80	90	95
y_k	68.0	67.1	66.4	65.6	64.6	61.8	61.0	60.0

dla $(0 \leq k \leq N)$. Chcemy znaleźć element optymalny $w^* \in F$ spełniający warunek:

$$\|f - w^*\|_2 = \min_{w \in F} \|f - w^*\| = \min_{a,b \in R} \sqrt{E(a,b)}$$

Naszą funkcją błędu w tym przypadku jest:

$$E(a,b) \coloneqq \sum_{k=0}^{N} \big(f(x_k) - w(x_k)\big)^2 = \sum_{k=0}^{N} (y_k - ax_k - b)^2$$

Teraz należy rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E(a,b)}{\partial a} = -2 \displaystyle\sum_{k=0}^{N} (y_k - ax_k - b)^1 \, x_k = 0 \\ \dfrac{\partial E(a,b)}{\partial b} = -2 \displaystyle\sum_{k=0}^{N} (y_k - ax_k - b)^1 = 0 \end{cases}$$

Po kilku przekształceniach otrzymujemy wartość stałych a oraz b w naszym modelu:

$$\begin{cases} a = \dfrac{(N+1)S_4 - S_1 S_3}{(N+1)S_2 - S_1^2} \\ b = \dfrac{S_2 S_3 - S_1 S_4}{(N+1)S_2 - S_1^2} \end{cases}$$

dla $S_1 \coloneqq \sum_k x_k$, $S_2 \coloneqq \sum_k x_k^2$, $S_3 \coloneqq \sum_k y_k$, $S_4 \coloneqq \sum_k x_k \, y_k$. Teraz należy policzyć wszystkie sumy, które wynoszą kolejno: $S_1 = 365$, $S_2 = 26525$, $S_3 = 514.5$, $S_4 = 22685$, a następnie podstawić te wartości do układu równań ($N = 7$ – indeks ostatniego punktu, zaczynając indeksowanie od 0), dzięki czemu otrzymamy $a = -0.08, b = 67.96$.

Metoda macierzowa:

Rozwiązujemy to samo zadanie, tzn. naszą funkcją jest $y = ax + b$. Musimy z niej "wyciągnąć" składowe przestrzeni Π_1: $f_1 = 1, f_2 = x$. Dzięki temu możemy stworzyć macierz układu równań, a następnie go rozwiązać (w tym przypadku całkowicie omijamy obliczanie pochodnych cząstkowych!!). Wygląda ona następująco:

$$\begin{bmatrix} < f_1, f_1 > & < f_1, f_2 > \\ < f_2, f_1 > & < f_2, f_2 > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{b} \\ \mathrm{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < 1,1 > & < 1, \mathrm{x} > \\ < \mathrm{x}, 1 > & < \mathrm{x}, \mathrm{x} > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{b} \\ \mathrm{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < 1, \mathrm{y} > \\ < \mathrm{x}, \mathrm{y} > \end{bmatrix}$$

Operacja $<\cdot,\cdot>$ to dyskretny iloczyn skalarny, który obliczamy w następujący sposób:

$$< f, g >_N = \sum_{k=0}^{N} f(x_k) g(x_k)$$

Obliczmy więc potrzebne nam wartości:

$$< 1,1 > = \sum_{i=0}^{7} 1(x_i) \cdot 1(x_i) = \sum_{i=0}^{7} 1 \ \cdot \ 1 = 8$$

$$< 1, x > \ = < x, 1 > = \sum_{i=0}^{7} x_i = 8$$

$$< x, x > = \sum_{i=0}^{7} x_i^2 = 26525$$

$$< 1, y > = \sum_{i=0}^{7} y_i = 514.5$$

$$< x, y > = \sum_{i=0}^{7} x_i y_i = 22685$$

Otrzymane wartości podstawiamy i rozwiązujemy następującą macierz:

$$\begin{bmatrix} 8 & 365 \\ 365 & 26525 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{b} \\ \mathrm{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 514.5 \\ 22685 \end{bmatrix}$$

i otrzymujemy wynik: $a = -0.08, b \ = \ 67.96$.